Formalisation de la théorie de l'homotopie en théorie des types homotopiques

Guillaume Brunerie (sous la direction de Carlos Simpson)
Laboratoire J.A. Dieudonné (LJAD) — Université de Nice Sophia Antipolis

Théorie des types

La *théorie des types* est un système formel développé pour servir d'alternative à la théorie des ensembles comme fondation des mathématiques.

Elle est basée sur les concepts de base suivants :
- Une collection de *types*
- Une collection de *termes*, chacun ayant un type uniquement déterminé par des règles dites *règles de typage*
- Des *règles de réductions* expliquant quels termes sont égaux à d'autres par définition

Certains types peuvent dépendre de termes, auquel cas on parle de *types dépendants*.

Exemple : Syntaxe, règles de typage et règles de réduction du type produit

- Si `A` et `B` sont deux types, alors `A × B` est un type
- Si `a` et `b` sont deux termes de types `A` et `B`, alors `(a, b)` est un terme de type `A × B`
- Si `u` est un terme de type `A × B`, alors `fst(u)` est un terme de type `A`
- Si `u` est un terme de type `A × B`, alors `snd(u)` est un terme de type `B`
- Le terme `fst((a, b))` est égal à `a` par définition
- Le terme `snd((a, b))` est égal à `b` par définition

On peut introduire de nombreux autres types, comme :
- Le type des fonctions `A → B` entre deux types `A` et `B`
- Le type des entiers naturels $\mathbb{N}$
- Le type des petits types `Type`
- Le type identité $\texttt{a} =_{\texttt{A}} \texttt{b}$ pour `A` un type et `a` et `b` deux termes de type `A`

En pratique, on n'autorise l'introduction de nouveaux types que selon un nombre limité de schémas précis.

Une des grandes forces de la théorie des types est qu'elle admet une double interprétation : ensembliste et logique, ce qui permet de représenter à la fois les mathématiques et la logique dans un cadre unifié.

Interprétations ensembliste et logique de la théorie des types

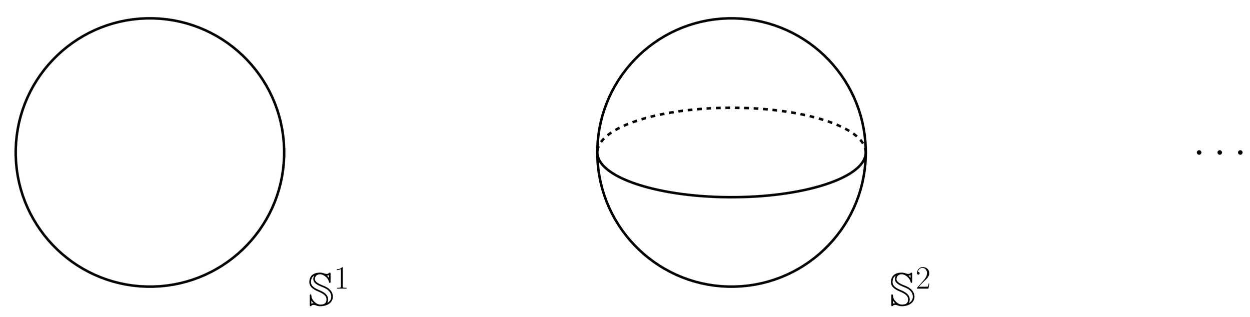
Ensemble	$\leftrightarrow$	Type	$\leftrightarrow$	Proposition
Élément	$\leftrightarrow$	Terme	$\leftrightarrow$	Démonstration
Ensemble des fonctions	$\leftrightarrow$	Type des fonctions	$\leftrightarrow$	Implication
Produit cartésien	$\leftrightarrow$	Type produit	$\leftrightarrow$	Conjonction
"δ de Kronecker"	$\leftrightarrow$	Type identité	$\leftrightarrow$	Égalité

Une autre propriété très importante de la théorie des types est qu'elle est *constructive* : si on a un terme de type $\mathbb{N}$ sans variables libres et qu'on lui applique les règles de réduction de façon répétée jusqu'à ce que cela ne soit plus possible, alors
- Ce processus termine (*normalisation forte*)
- Le résultat final ne dépend pas de l'ordre des réductions (*confluence*)
- Le résultat final est un entier naturel sous sa forme canonique $(0, 1, 2, \ldots)$ (*canonicité*)

En particulier, toutes les fonctions définissables sont calculables : de la preuve de l'existence d'une fonction, on peut automatiquement en déduire un algorithme la calculant.

Théorie de l'homotopie

La *théorie de l'homotopie* s'intéresse à la classification des espaces topologiques à déformation continue près (équivalence d'homotopie).
On s'intéressera ici principalement à la sphère de dimension n, notée $\mathbb{S}^n$.



Afin de distinguer les espaces, on leur associe divers invariants algébriques, parmi eux les groupes d'homotopie :

$$\pi_k(A) = \{\text{classes d'homotopie d'applications pointées } \mathbb{S}^k \to A\}$$

Calculer les groupes d'homotopie d'un espace est en général très difficile, par exemple pour les sphères on peut montrer qu'obtient les groupes suivants (où $\mathbb{Z}_n$ désigne $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) :

Groupes d'homotopie des sphères

	$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{S}^3$	$\mathbb{S}^4$	$\mathbb{S}^5$	$\mathbb{S}^6$	$\mathbb{S}^7$	$\mathbb{S}^8$
π_1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0
π_2	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0
π_3	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0
π_4	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
π_5	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0
π_6	0	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0
π_7	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0
π_8	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
π_9	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
π_{10}	0	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$
π_{11}	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_{24}$
π_{12}	0	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}_2$	0	0
π_{13}	0	$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{60}$	$\mathbb{Z}_2$	0

La structure globale des groupes d'homotopie des sphères n'est pas encore bien comprise, mais certains motifs sont connus :
- Les groupes d'homotopie de $\mathbb{S}^1$ sont tous triviaux, excepté $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ qui est égal à $\mathbb{Z}$
- Les groupes sur la diagonale sont tous égaux à $\mathbb{Z}$, et ceux au dessus sont tous triviaux
- Les groupes d'homotopie de $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{S}^3$ coïncident deux à deux, excepté $\pi_2(\mathbb{S}^2) \neq \pi_2(\mathbb{S}^3)$
- Le groupe $\pi_{n+k}(\mathbb{S}^n)$ ne dépend pas de n pour $n \geq k+2$
- Chaque $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ est soit un groupe fini abélien, soit le produit de $\mathbb{Z}$ par un groupe fini abélien (pour $\pi_n(\mathbb{S}^n)$ et $\pi_{4n-1}(\mathbb{S}^{2n})$)

Théorie des types homotopiques

La *théorie des types homotopiques* part de l'interprétation homotopique suivante :

Type	$\leftrightarrow$	Espace topologique à déformation près
Terme	$\leftrightarrow$	Point
Type dépendant	$\leftrightarrow$	Fibration
Type des fonctions	$\leftrightarrow$	Espace des fonctions continues
Type identité	$\leftrightarrow$	Espace des chemins continus

Les types sont donc désormais vus comme des espaces, toutes les fonctions sont continues, et une preuve d'égalité entre deux points n'est rien d'autre qu'un chemin continu entre ces deux points.

On peut montrer que toutes les règles de la théorie des types restent valides, ce qui permet d'utiliser la théorie des types pour démontrer des résultats en théorie de l'homotopie.
De plus, cette interprétation homotopique suggère certaines additions à la théorie des types :
- Les *types inductifs supérieurs*, une nouvelle classe de types qui permet de définir directement des espaces provenant de la théorie de l'homotopie, comme par exemple les sphères, les espaces projectifs, et plus généralement la plupart des complexes cellulaires
- L'*axiome d'univalence*, qui permet entre autres de définir des fibrations intéressantes sur les types inductifs supérieurs afin de calculer leurs groupes d'homotopie, et qui correspond à la propriété de complétude des espaces de Segal

Constructivité

La théorie des types homotopiques telle qu'elle est développée actuellement n'est pas constructive au sens ci-dessus parce qu'elle se base sur des axiomes en plus des règles de typage.

► J'essaye de développer une nouvelle théorie des types ayant sensiblement la même expressivité mais uniquement basée sur des règles de typage et ayant donc à nouveau la propriété de constructivité.

Formalisation

Plusieurs logiciels implémentant la théorie des types existent, les plus connus étant Coq (développé à l'INRIA en France) et Agda (développé à l'université de Chalmers en Suède).

► Je travaille avec les développeurs d'Agda au test et à l'implémentation de diverses fonctionnalités, et je travaille également à l'écriture d'une librairie Agda pour la théorie des types homotopiques.

Mathématiques

La théorie des types homotopiques impose certaines restrictions sur les démonstrations : pas de raisonnement par l'absurde, d'axiome du choix, de décomposition cellulaire ou simpliciale des espaces, de théorème de Whitehead, etc.

► J'étudie quels théorèmes de théorie de l'homotopie peuvent être redémontrés dans ce nouveau cadre, ce qui force à trouver des démonstrations souvent à la fois plus élémentaires et plus intrinsèques.