De la vérité à la démonstration : le théorème de complétude de Gödel

Guillaume Brunerie

Séminaire mathématique des élèves
du lycée Louis-le-Grand

4 février 2009

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Termes de l'arithmétique

$\mathcal{C}$: ensemble des symboles de constantes, $0 \in \mathcal{C}$
$\mathcal{V}$: ensemble des symboles de variables (infini)

Définition

L'ensemble des termes sur $\mathcal{C}$ est défini par :

$$\mathcal{T} = \mathcal{C} \,|\, \mathcal{V} \,|\, S\mathcal{T} \,|\, (\mathcal{T} + \mathcal{T}) \,|\, (\mathcal{T} \cdot \mathcal{T})$$

Définition

Un terme qui ne contient pas de symbole de variable est appellé un terme clos.

Exemples de termes

Exemples

Si $c \in \mathcal{C}$ et $x, y \in \mathcal{V}$,

- $x \cdot \mathrm{S}y + c$ n'est rien du tout
- $(0 + (0 \cdot \mathrm{S}c))$ est un terme clos
- $(((c + \mathrm{S}y) \cdot \mathrm{S}(\mathrm{S}x \cdot (\mathrm{SS}0 + \mathrm{SSS}x))) + 0)$ est un terme.

Formules logiques

Définition

L'ensemble des formules est défini par :

$$\mathcal{F} = \perp \,|\, (\mathcal{T} = \mathcal{T}) \,|\, \neg\mathcal{F} \,|\, (\mathcal{F} \vee \mathcal{F}) \,|\, (\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \,|\, (\mathcal{F} \to \mathcal{F}) \,|\, \exists\mathcal{V}\mathcal{F} \,|\, \forall\mathcal{V}\mathcal{F}$$

Formules logiques

Définition

L'ensemble des formules est défini par :

$$\mathcal{F} = \perp \mid (\mathcal{T} = \mathcal{T}) \mid \neg\mathcal{F} \mid (\mathcal{F} \vee \mathcal{F}) \mid (\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \mid (\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}) \mid \exists\mathcal{V}\mathcal{F} \mid \forall\mathcal{V}\mathcal{F}$$

Définitions

- Variables libres : variables non liées par un quantificateur

Formules logiques

Définition

L'ensemble des formules est défini par :

$$\mathcal{F} = \perp \mid (\mathcal{T} = \mathcal{T}) \mid \neg\mathcal{F} \mid (\mathcal{F} \vee \mathcal{F}) \mid (\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \mid (\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}) \mid \exists\mathcal{V}\mathcal{F} \mid \forall\mathcal{V}\mathcal{F}$$

Définitions

- Variables libres : variables non liées par un quantificateur
- Formule close : formule sans variable libre

Formules logiques

Définition

L'ensemble des formules est défini par :

$$\mathcal{F} = \bot \,|\, (\mathcal{T} = \mathcal{T}) \,|\, \neg\mathcal{F} \,|\, (\mathcal{F} \vee \mathcal{F}) \,|\, (\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \,|\, (\mathcal{F} \to \mathcal{F}) \,|\, \exists\mathcal{V}\mathcal{F} \,|\, \forall\mathcal{V}\mathcal{F}$$

Définitions

- Variables libres : variables non liées par un quantificateur
- Formule close : formule sans variable libre
- Théorie : ensemble de formules closes

Exemples de formules

Exemples

- $\forall x \exists n (x = S^n 0)$: rien du tout
- $\forall x \exists y ((x + y) = 0)$: formule close
- $\exists x (\neg(x = y) \wedge \neg(x = Sy))$: formule à une variable libre : y

Exemples de formules

Exemples

- $\forall x \exists n (x = S^n 0)$: rien du tout
- $\forall x \exists y ((x + y) = 0)$: formule close
- $\exists x (\neg (x = y) \wedge \neg (x = Sy))$: formule à une variable libre : y

Notation

- $F(x)$: formule à une variable libre x
- $F(t)$: formule obtenue en substituant t à x dans $F(x)$

Exemples de formules

Exemples

- $\forall x \exists n (x = S^n 0)$: rien du tout
- $\forall x \exists y ((x + y) = 0)$: formule close
- $\exists x (\neg (x = y) \wedge \neg (x = Sy))$: formule à une variable libre : y

Notation

- $F(x)$: formule à une variable libre x
- $F(t)$: formule obtenue en substituant t à x dans $F(x)$

Exemple

- $F(x) : \exists y (x = (SS0 \cdot y))$
- $F(SSS0) : \exists y (SSS0 = (SS0 \cdot y))$

Axiomes de Peano

Définition

L'arithmétique de Peano est l'ensemble (noté PA) des formules suivantes :

Axiomes de Peano

Définition

L'arithmétique de Peano est l'ensemble (noté PA) des formules suivantes :

- $A_1 : \forall x \neg(Sx = 0)$

Axiomes de Peano

Définition

L'arithmétique de Peano est l'ensemble (noté PA) des formules suivantes :

- $A_1 : \forall x \neg(Sx = 0)$
- $A_2 : \forall x \forall y ((Sx = Sy) \to (x = y))$

Axiomes de Peano

Définition

L'arithmétique de Peano est l'ensemble (noté PA) des formules suivantes :

- $A_1 : \forall x \neg(Sx = 0)$
- $A_2 : \forall x \forall y ((Sx = Sy) \rightarrow (x = y))$
- $A_3 : \forall x ((x + 0) = x)$

Axiomes de Peano

Définition

L'arithmétique de Peano est l'ensemble (noté PA) des formules suivantes :

- $A_1 : \forall x \neg(\mathrm{S}x = 0)$
- $A_2 : \forall x \forall y((\mathrm{S}x = \mathrm{S}y) \to (x = y))$
- $A_3 : \forall x((x + 0) = x)$
- $A_4 : \forall x \forall y((x + \mathrm{S}y) = \mathrm{S}(x + y))$

Axiomes de Peano

Définition

L'arithmétique de Peano est l'ensemble (noté PA) des formules suivantes :

- $A_1 : \forall x \neg(\mathrm{S}x = 0)$
- $A_2 : \forall x \forall y((\mathrm{S}x = \mathrm{S}y) \to (x = y))$
- $A_3 : \forall x((x + 0) = x)$
- $A_4 : \forall x \forall y((x + \mathrm{S}y) = \mathrm{S}(x + y))$
- $A_5 : \forall x((x \cdot 0) = 0)$

Axiomes de Peano

Définition

L'arithmétique de Peano est l'ensemble (noté PA) des formules suivantes :

- $A_1 : \forall x \neg(\mathrm{S}x = 0)$
- $A_2 : \forall x \forall y((\mathrm{S}x = \mathrm{S}y) \rightarrow (x = y))$
- $A_3 : \forall x((x + 0) = x)$
- $A_4 : \forall x \forall y((x + \mathrm{S}y) = \mathrm{S}(x + y))$
- $A_5 : \forall x((x \cdot 0) = 0)$
- $A_6 : \forall x \forall y((x \cdot \mathrm{S}y) = ((x \cdot y) + x))$

Axiomes de Peano

Définition

L'arithmétique de Peano est l'ensemble (noté PA) des formules suivantes :

- $A_1 : \forall x \neg(\mathrm{S}x = 0)$
- $A_2 : \forall x \forall y((\mathrm{S}x = \mathrm{S}y) \to (x = y))$
- $A_3 : \forall x((x + 0) = x)$
- $A_4 : \forall x \forall y((x + \mathrm{S}y) = \mathrm{S}(x + y))$
- $A_5 : \forall x((x \cdot 0) = 0)$
- $A_6 : \forall x \forall y((x \cdot \mathrm{S}y) = ((x \cdot y) + x)))$
- $\{A_{rec}(F)\}$: axiomes de récurrence

Schéma d'axiomes de récurrence

Axiomes de récurrence

Pour toute formule $F(x, y_1, ..., y_n)$ on a l'axiome
$A_{rec}(F) : \forall y_1 ... \forall y_n((F(0) \wedge \forall x(F(x) \rightarrow F(Sx))) \rightarrow \forall x F(x))$

Exemple

Si $F(x)$ est la formule $((0 + x) = x)$, on obtient l'axiome :

$A_{rec}((0 + x) = x)$:

$((((0 + 0) = 0) \wedge \forall x(((0 + x) = x) \rightarrow ((0 + Sx) = Sx))) \rightarrow$
$\forall x((0 + x) = x))$

Sommaire

Notion de démonstration

On se place dans une théorie T (ensemble de formules closes).

Définition

Démonstration : suite finie de formules telle que chacune soit :

- un axiome
- une « conséquence logique » d'une ou plusieurs des formules précédentes
- une hypothèse (formule quelconque, mais indentée vers la droite)

Définition

Formule démontrable : formule close F telle qu'il existe une démonstration dont F soit la dernière formule et ne soit pas indentée.
On note $T \vdash F$

Règles de déduction (I)

Règles relatives à l'implication

	1	A
$\rightarrow_i$	2	B
	3	$(A \rightarrow B)$

	1	A
$\rightarrow_e$	2	$(A \rightarrow B)$
	3	B

Règles relatives à la conjonction

	1	A
$\wedge_i$	2	B
	3	$(A \wedge B)$

	1	$(A \wedge B)$
$\wedge_e^g$	2	A

	1	$(A \wedge B)$
$\wedge_e^d$	2	B

Exemple 1 (*modus barbara*)

A, B et C sont trois formules closes quelconques.

À démontrer

$(((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C))$

Démonstration

1	$((A \to B) \wedge (B \to C))$	hyp
2	A	hyp
3	$(A \to B)$	$\wedge_e^g(1)$
4	B	$\to_e (2,3)$
5	$(B \to C)$	$\wedge_e^d(1)$
6	C	$\to_e (4,5)$
7	$(A \to C)$	$\to_i$
8	$(((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C))$	$\to_i$

Règles de déduction (II)

Règles relatives à la disjonction

$$\begin{array}{ll} & 1\ A \\ \vee_i^d & 2\ (A \vee B) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 1\ B \\ \vee_i^g & 2\ (A \vee B) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 1\ (A \vee B) \\ \vee_e & 2\ (A \to C) \\ & 3\ (B \to C) \\ & 4\ C \end{array}$$

Règles relatives à la négation

$$\begin{array}{ll} & 1\ (A \to \bot) \\ \neg_i & 2\ \neg A \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 1\ \neg A \\ \neg_e & 2\ (A \to \bot) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 1\ \neg\neg A \\ \neg_e^2 & 2\ A \end{array}$$

Règles relatives à l'égalité

$$=_i\ 1\ (t = t) \qquad \begin{array}{ll} & 1\ (t = u) \\ =_e & 2\ F(t) \\ & 3\ F(u) \end{array}$$

Règles de déduction (III)

Règles relatives au quantificateur universel

$$\begin{array}{ll} & 1\ F(x) \\ \forall_i & 2\ \forall x F(x) \end{array}$$ où x n'est libre dans aucune des hypothèses de F

$$\begin{array}{ll} & 1\ \forall x F(x) \\ \forall_e & 2\ F(t) \end{array}$$

Règles relatives au quantificateur existentiel

$$\begin{array}{ll} & 1\ F(t) \\ \exists_i & 2\ \exists x F(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & 1\ \exists x F(x) \\ \exists_e & 2\ (F(x) \to A) \\ & 3\ A \end{array}$$ où x n'est libre dans aucune des hypothèses de F, ni dans A

Exemple 2

À démontrer

$\neg\exists x(Sx = 0)$

Démonstration

1	$\exists x(Sx = 0)$	hyp
2	$\quad (Sx = 0)$	hyp
3	$\quad \forall x \neg(Sx = 0)$	A_1
4	$\quad \neg(Sx = 0)$	$\forall_e(3, x)$
5	$\quad ((Sx = 0) \rightarrow \perp)$	$\neg_e(4)$
6	$\quad \perp$	$\rightarrow_e (2, 5)$
7	$((Sx = 0) \rightarrow \perp)$	$\rightarrow_i$
8	$\perp$	$\exists_e(1, 7, x)$

Exemple 2

À démontrer

$\neg\exists x(Sx = 0)$

Démonstration (suite)

1	$\exists x(Sx = 0)$	hyp
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
7	$((Sx = 0) \to \bot)$	$\to_i$
8	$\bot$	$\exists_e(1, 7, x)$
9	$(\exists x(Sx = 0) \to \bot)$	$\to_i$
10	$\neg\exists x(Sx = 0)$	$\neg_i(9)$

Exemple 3

À démontrer

Toute involution est bijective.

Démonstration

Soit f une fonction involutive (hyp), montrons qu'elle est bijective.
Injectivité :
Soit x et y tels que $f(x) = f(y)$ (hyp)
On a alors $f(f(x)) = f(f(y))$ $(=_i, =_e)$ donc $x = y$ $(\forall_e * 2, =_e *2)$, et donc f est injective $(\rightarrow_i, \forall_i * 2)$.
Surjectivité :
Soit z, on a $f(f(z)) = z$ $(\forall_e)$, donc z admet un antécédent $(\exists_i)$ et donc f est surjective $(\forall_i)$
Donc f est bijective $(\wedge_i)$ et ainsi $\boxed{\text{toute involution est bijective}}$ $(\rightarrow_i, \forall_i)$

Sommaire

Valeur d'un terme clos

Définition

Une interprétation de l'arithmétique est la donnée de :

- Un ensemble $\mathcal{M}$
- Pour chaque symbole de constante c, un élément $c_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$
- Des applications $\mathrm{S}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $+_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^2 \to \mathcal{M}$ et $\cdot_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^2 \to \mathcal{M}$

Valeur d'un terme clos

Définition

Une interprétation de l'arithmétique est la donnée de :

- Un ensemble $\mathcal{M}$
- Pour chaque symbole de constante c, un élément $c_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$
- Des applications $\mathsf{S}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $+_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^2 \to \mathcal{M}$ et $\cdot_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^2 \to \mathcal{M}$

Définition

La valeur d'un terme clos est définie par récurrence par :

- Si $c \in \mathcal{C}$, $Val_{\mathcal{M}}(c) = c_{\mathcal{M}}$
- Si $t \in \mathcal{T}$, $Val_{\mathcal{M}}(\mathsf{S}t) = \mathsf{S}_{\mathcal{M}}(Val_{\mathcal{M}}(t))$
- Si $t, t' \in \mathcal{T}$, $Val_{\mathcal{M}}(t + t') = Val_{\mathcal{M}}(t) +_{\mathcal{M}} Val_{\mathcal{M}}(t')$ et $Val_{\mathcal{M}}(t \cdot t') = Val_{\mathcal{M}}(t) \cdot_{\mathcal{M}} Val_{\mathcal{M}}(t')$

Exemple

Exemple

On considère l'interprétation définie par :

- $\mathcal{M} = \mathbb{R}$
- $0_{\mathcal{M}} = 2$
- $c_{\mathcal{M}} = \pi$
- $\mathrm{S}_{\mathcal{M}} = x \mapsto x^2$
- $+_{\mathcal{M}} = (x, y) \mapsto xy$
- $\cdot_{\mathcal{M}} = (x, y) \mapsto \frac{x+y}{\sqrt{2+|x|}}$.

On a alors par exemple $Val_{\mathcal{M}}(0 + (0 \cdot \mathrm{S}c)) = 2 + \pi^2$

Satisfiabilité d'une formule dans une interprétation

Définition

Soit $\mathcal{M}$ une interprétation de l'arithmétique, on définit la relation $\models$ sur les formules closes par :

Satisfiabilité d'une formule dans une interprétation

Définition

Soit $\mathcal{M}$ une interprétation de l'arithmétique, on définit la relation $\models$ sur les formules closes par :

- $\mathcal{M} \not\models \perp$

Satisfiabilité d'une formule dans une interprétation

Définition

Soit $\mathcal{M}$ une interprétation de l'arithmétique, on définit la relation $\models$ sur les formules closes par :

- $\mathcal{M} \not\models \perp$
- $\mathcal{M} \models (t = t')$ ssi $Val_{\mathcal{M}}(t) = Val_{\mathcal{M}}(t')$

Satisfiabilité d'une formule dans une interprétation

Définition

Soit $\mathcal{M}$ une interprétation de l'arithmétique, on définit la relation $\models$ sur les formules closes par :

- $\mathcal{M} \not\models \perp$
- $\mathcal{M} \models (t = t')$ ssi $Val_{\mathcal{M}}(t) = Val_{\mathcal{M}}(t')$
- $\mathcal{M} \models \neg F$ ssi $\mathcal{M} \not\models F$
- $\mathcal{M} \models (F \vee G)$ ssi $\mathcal{M} \models F$ ou $\mathcal{M} \models G$
- $\mathcal{M} \models (F \wedge G)$ ssi $\mathcal{M} \models F$ et $\mathcal{M} \models G$
- $\mathcal{M} \models (F \rightarrow G)$ ssi si $\mathcal{M} \models F$ alors $\mathcal{M} \models G$

Satisfiabilité d'une formule dans une interprétation

Définition

Soit $\mathcal{M}$ une interprétation de l'arithmétique, on définit la relation $\models$ sur les formules closes par :

- $\mathcal{M} \not\models \bot$
- $\mathcal{M} \models (t = t')$ ssi $Val_{\mathcal{M}}(t) = Val_{\mathcal{M}}(t')$
- $\mathcal{M} \models \neg F$ ssi $\mathcal{M} \not\models F$
- $\mathcal{M} \models (F \vee G)$ ssi $\mathcal{M} \models F$ ou $\mathcal{M} \models G$
- $\mathcal{M} \models (F \wedge G)$ ssi $\mathcal{M} \models F$ et $\mathcal{M} \models G$
- $\mathcal{M} \models (F \rightarrow G)$ ssi si $\mathcal{M} \models F$ alors $\mathcal{M} \models G$
- $\mathcal{M} \models \exists x F(x)$ ss'il existe $a \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \overset{x:=a}{\models} F(x)$

Satisfiabilité d'une formule dans une interprétation

Définition

Soit $\mathcal{M}$ une interprétation de l'arithmétique, on définit la relation $\models$ sur les formules closes par :

- $\mathcal{M} \not\models \perp$
- $\mathcal{M} \models (t = t')$ ssi $Val_{\mathcal{M}}(t) = Val_{\mathcal{M}}(t')$
- $\mathcal{M} \models \neg F$ ssi $\mathcal{M} \not\models F$
- $\mathcal{M} \models (F \vee G)$ ssi $\mathcal{M} \models F$ ou $\mathcal{M} \models G$
- $\mathcal{M} \models (F \wedge G)$ ssi $\mathcal{M} \models F$ et $\mathcal{M} \models G$
- $\mathcal{M} \models (F \rightarrow G)$ ssi si $\mathcal{M} \models F$ alors $\mathcal{M} \models G$
- $\mathcal{M} \models \exists x F(x)$ ss'il existe $a \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \overset{x:=a}{\models} F(x)$
- $\mathcal{M} \models \forall x F(x)$ ssi pour tout $a \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \overset{x:=a}{\models} F(x)$

Exemple

Exemple

On reprend l'interprétation précédente :
$\mathcal{M} = \mathbb{R}$, $0_{\mathcal{M}} = 2$, $\mathsf{S}_{\mathcal{M}} = x \mapsto x^2$, $+_{\mathcal{M}} = (x, y) \mapsto xy$,
$\cdot_{\mathcal{M}} = (x, y) \mapsto \frac{x+y}{\sqrt{2+|x|}}$

Cette interprétation satisfait la formule close

$$\exists x((\mathsf{S}x = x) \wedge \forall y((x + y) = x))$$

Il suffit en effet de prendre $a = 0 \in \mathbb{R}$.

Validité d'une formule

Définition

Si T est une théorie, $\mathcal{M}$ est un modèle de T si pour tout $F \in T$, $\mathcal{M} \models F$.

Exemples de modèles de PA

$\mathcal{M} = \mathbb{N}$, $0_{\mathcal{M}} = 0$, $\mathrm{S}_{\mathcal{M}} = n \mapsto n+1$, $+_{\mathcal{M}} = +$, $\cdot_{\mathcal{M}} = \cdot$.
$\mathcal{M} = 2\mathbb{N}$, $0_{\mathcal{M}} = 0$, $\mathrm{S}_{\mathcal{M}} = n \mapsto n+2$, $+_{\mathcal{M}} = +$, $\cdot_{\mathcal{M}} = (x, y) \mapsto \frac{xy}{2}$.

Validité d'une formule

Définition

Si T est une théorie, $\mathcal{M}$ est un modèle de T si pour tout $F \in T$, $\mathcal{M} \models F$.

Exemples de modèles de *PA*

$\mathcal{M} = \mathbb{N}$, $0_{\mathcal{M}} = 0$, $\mathrm{S}_{\mathcal{M}} = n \mapsto n+1$, $+_{\mathcal{M}} = +$, $\cdot_{\mathcal{M}} = \cdot$.
$\mathcal{M} = 2\mathbb{N}$, $0_{\mathcal{M}} = 0$, $\mathrm{S}_{\mathcal{M}} = n \mapsto n+2$, $+_{\mathcal{M}} = +$, $\cdot_{\mathcal{M}} = (x, y) \mapsto \frac{xy}{2}$.

Définition

Soit T une théorie, une formule close F est dite valide si elle est satisfaite dans *tout* modèle de T, et on note $T \models F$.

Sommaire

Théorème de correction

Théorème de correction

Soit T une théorie et F une formule close.
Si $T \vdash F$, alors $T \models F$.

On prend $\mathcal{M}$ un modèle de T. Par récurrence sur la longueur de la démonstration en distinguant suivant la dernière règle utilisée.

Théorème de correction

Théorème de correction

Soit T une théorie et F une formule close.
Si $T \vdash F$, alors $T \models F$.

On prend $\mathcal{M}$ un modèle de T. Par récurrence sur la longueur de la démonstration en distinguant suivant la dernière règle utilisée.
Si c'est un axiome, c'est fini.

Théorème de correction

Théorème de correction

Soit T une théorie et F une formule close.
Si $T \vdash F$, alors $T \models F$.

On prend $\mathcal{M}$ un modèle de T. Par récurrence sur la longueur de la démonstration en distinguant suivant la dernière règle utilisée.
Si c'est un axiome, c'est fini.

Règles relatives à la disjonction

$$\begin{array}{ll} & 1\ A \\ \vee_i^d & 2\ (A \vee B) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 1\ B \\ \vee_i^g & 2\ (A \vee B) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 1\ (A \vee B) \\ \vee_e & 2\ (A \to C) \\ & 3\ (B \to C) \\ & 4\ C \end{array}$$

Théorème de correction

Théorème de correction

Soit T une théorie et F une formule close.
Si $T \vdash F$, alors $T \models F$.

On prend $\mathcal{M}$ un modèle de T. Par récurrence sur la longueur de la démonstration en distinguant suivant la dernière règle utilisée.
Si c'est un axiome, c'est fini.

Règles relatives à la disjonction

$$\begin{array}{ll} & 1\ A \\ \vee_i^d & 2\ (A \vee B) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 1\ B \\ \vee_i^g & 2\ (A \vee B) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & 1\ (A \vee B) \\ \vee_e & 2\ (A \to C) \\ & 3\ (B \to C) \\ & 4\ C \end{array}$$

etc.

Sommaire

Théorème de complétude

Théorème de complétude de Gödel

Soit T une théorie et F une formule close.
Si $T \models F$, alors $T \vdash F$.

Il suffit de montrer le théorème suivant :

Théorème

Soit T une théorie.
Si $T \nvdash \perp$ (T est dite consistante), alors il existe un modèle de T.

Idée de la démonstration

T : théorie consistante écrite sur $\mathcal{C}$ (dénombrable)
On cherche à construire $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models F \iff Th \vdash F$ où Th est une surthéorie de T

Idée de la démonstration

T : théorie consistante écrite sur $\mathcal{C}$ (dénombrable)
On cherche à construire $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models F \iff Th \vdash F$ où Th est une surthéorie de T

Le modèle qu'on choisit est l'ensemble des termes clos.

Idée de la démonstration

T : théorie consistante écrite sur $\mathcal{C}$ (dénombrable)
On cherche à construire $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models F \iff Th \vdash F$ où Th est une surthéorie de T

Le modèle qu'on choisit est l'ensemble des termes clos.

- On doit le quotienter modulo $t \sim t'$ ssi $Th \vdash (t = t')$

Idée de la démonstration

T : théorie consistante écrite sur $\mathcal{C}$ (dénombrable)
On cherche à construire $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models F \iff Th \vdash F$ où Th est une surthéorie de T

Le modèle qu'on choisit est l'ensemble des termes clos.

- On doit le quotienter modulo $t \sim t'$ ssi $Th \vdash (t = t')$
- Pour tout énoncé qui affirme l'existence d'un objet, il doit exister un terme clos vérifiant cette propriété

Idée de la démonstration

T : théorie consistante écrite sur $\mathcal{C}$ (dénombrable)
On cherche à construire $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models F \iff Th \vdash F$ où Th est une surthéorie de T

Le modèle qu'on choisit est l'ensemble des termes clos.

- On doit le quotienter modulo $t \sim t'$ ssi $Th \vdash (t = t')$
- Pour tout énoncé qui affirme l'existence d'un objet, il doit exister un terme clos vérifiant cette propriété
- La théorie doit être complète (T est complète si pour toute formule close F, $T \vdash F$ ou $T \vdash \neg F$)

Construction d'une surthéorie vérifiant la condition d'existence

Définition

- $\begin{cases} \mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cup \{c_F \mid F \text{ formule sur } \mathcal{C} \text{ à une variable libre}\} \\ T_1 = T \cup \{(\exists x F(x) \to F(c_F)) \mid F \dots\} \end{cases}$

Construction d'une surthéorie vérifiant la condition d'existence

Définition

- $\begin{cases} \mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cup \{c_F \mid F \text{ formule sur } \mathcal{C} \text{ à une variable libre}\} \\ T_1 = T \cup \{(\exists x F(x) \to F(c_F)) \mid F \ldots\} \end{cases}$
- $\begin{cases} \mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{C}_n \cup \{c_F \mid F \text{ formule sur } \mathcal{C}_n\text{, à une variable libre}\} \\ T_{n+1} = T_n \cup \{(\exists x F(x) \to F(c_F)) \mid F \ldots\} \end{cases}$

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, T_n est une théorie écrite sur C_n.

Construction d'une surthéorie vérifiant la condition d'existence

Définition

- $\begin{cases} \mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cup \{c_F \,|\, F \text{ formule sur } \mathcal{C} \text{ à une variable libre}\} \\ T_1 = T \cup \{(\exists x F(x) \rightarrow F(c_F)) \mid F \ldots\} \end{cases}$
- $\begin{cases} \mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{C}_n \cup \{c_F \,|\, F \text{ formule sur } \mathcal{C}_n, \text{ à une variable libre}\} \\ T_{n+1} = T_n \cup \{(\exists x F(x) \rightarrow F(c_F)) \mid F \ldots\} \end{cases}$
- $\begin{cases} \mathcal{C}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}_n \\ T_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} T_n \end{cases}$

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, T_n est une théorie écrite sur C_n.

Construction d'une surthéorie vérifiant la condition d'existence

Définition

- $\begin{cases} \mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cup \{c_F \mid F \text{ formule sur } \mathcal{C} \text{ à une variable libre}\} \\ T_1 = T \cup \{(\exists x F(x) \to F(c_F)) \mid F \ldots\} \end{cases}$
- $\begin{cases} \mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{C}_n \cup \{c_F \mid F \text{ formule sur } \mathcal{C}_n, \text{ à une variable libre}\} \\ T_{n+1} = T_n \cup \{(\exists x F(x) \to F(c_F)) \mid F \ldots\} \end{cases}$
- $\begin{cases} \mathcal{C}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}_n \\ T_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} T_n \end{cases}$

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, T_n est une théorie écrite sur C_n.

Construction d'une surthéorie vérifiant la condition d'existence

Définition

- $\begin{cases} \mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cup \{c_F \mid F \text{ formule sur } \mathcal{C} \text{ à une variable libre}\} \\ T_1 = T \cup \{(\exists x F(x) \to F(c_F)) \mid F \dots\} \end{cases}$
- $\begin{cases} \mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{C}_n \cup \{c_F \mid F \text{ formule sur } \mathcal{C}_n, \text{ à une variable libre}\} \\ T_{n+1} = T_n \cup \{(\exists x F(x) \to F(c_F)) \mid F \dots\} \end{cases}$
- $\begin{cases} \mathcal{C}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}_n \\ T_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} T_n \end{cases}$

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, T_n est une théorie écrite sur C_n.

Lemme (admis)

La théorie T_∞ est consistante

Construction d'une sursurthéorie complète

Définition

L'ensemble des formules closes sur $\mathcal{C}_\infty$ est dénombrable, soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération de ces formules.

- $K_0 = T_\infty$

Construction d'une sursurthéorie complète

Définition

L'ensemble des formules closes sur $\mathcal{C}_\infty$ est dénombrable, soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération de ces formules.

- $K_0 = T_\infty$
- Si K_n est complète, $K_{n+1} = K_n$

Construction d'une sursurthéorie complète

Définition

L'ensemble des formules closes sur $\mathcal{C}_\infty$ est dénombrable, soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération de ces formules.

- $K_0 = T_\infty$
- Si K_n est complète, $K_{n+1} = K_n$
- Sinon $K_{n+1} = K_n \cup \{F_p\}$ où F_p est la première formule indécidable dans K_n. (F indécidable dans K_n ssi $K_n \nvdash F$ et $K_n \nvdash \neg F$)

Construction d'une sursurthéorie complète

Définition

L'ensemble des formules closes sur $\mathcal{C}_\infty$ est dénombrable, soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération de ces formules.

- $K_0 = T_\infty$
- Si K_n est complète, $K_{n+1} = K_n$
- Sinon $K_{n+1} = K_n \cup \{F_p\}$ où F_p est la première formule indécidable dans K_n. (F indécidable dans K_n ssi $K_n \nvdash F$ et $K_n \nvdash \neg F$)
- $Th = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$

Vérification de ses propriétés

Lemme

Th vérifie les propriétés suivante :

- $T \subset Th$
- Th est consistante
- Th est complète
- Pour toute formule F sur $\mathcal{C}_\infty$ à une variable libre, il existe un symbole de constante c_F tel que $Th \vdash (\exists x F(x) \rightarrow F(c_F))$

Création du modèle

Définition

On considère l'interprétation de l'arithmétique suivante :

- $\mathcal{M}$ est l'ensemble des termes clos écrits sur $\mathcal{C}_\infty$, quotienté par la relation d'équivalence $Th \vdash (t = t')$
- On interprète chaque constante par sa classe d'équivalence
- $\mathrm{S}_{\mathcal{M}}(\overline{t}) = \overline{\mathrm{S}t}$
- $\overline{t} +_{\mathcal{M}} \overline{t'} = \overline{(t + t')}$
- $\overline{t} \cdot_{\mathcal{M}} \overline{t'} = \overline{(t \cdot t')}$

Il reste à vérifier que pour toute formule close F,
$\mathcal{M} \models F \iff Th \vdash F$.

Vérification

Par récurrence sur la structure de la formule

Vérification

Par récurrence sur la structure de la formule

- $F = \perp$ (consistance)

Vérification

Par récurrence sur la structure de la formule

- $F = \perp$ (consistance)
- $F = (t = t')$ (quotient)

Vérification

Par récurrence sur la structure de la formule

- $F = \perp$ (consistance)
- $F = (t = t')$ (quotient)
- $F = \neg G$ (complétude + consistance)

Vérification

Par récurrence sur la structure de la formule

- $F = \perp$ (consistance)
- $F = (t = t')$ (quotient)
- $F = \neg G$ (complétude + consistance)
- $F = (G \vee H)$ (complétude)

Vérification

Par récurrence sur la structure de la formule

- $F = \perp$ (consistance)
- $F = (t = t')$ (quotient)
- $F = \neg G$ (complétude + consistance)
- $F = (G \vee H)$ (complétude)
- $F = (G \wedge H)$

Vérification

Par récurrence sur la structure de la formule

- $F = \perp$ (consistance)
- $F = (t = t')$ (quotient)
- $F = \neg G$ (complétude + consistance)
- $F = (G \vee H)$ (complétude)
- $F = (G \wedge H)$
- $F = (G \rightarrow H)$

Vérification

Par récurrence sur la structure de la formule

- $F = \bot$ (consistance)
- $F = (t = t')$ (quotient)
- $F = \neg G$ (complétude + consistance)
- $F = (G \vee H)$ (complétude)
- $F = (G \wedge H)$
- $F = (G \rightarrow H)$
- $F = \exists x G(x)$ (condition existence)

Vérification

Par récurrence sur la structure de la formule

- $F = \bot$ (consistance)
- $F = (t = t')$ (quotient)
- $F = \neg G$ (complétude + consistance)
- $F = (G \vee H)$ (complétude)
- $F = (G \wedge H)$
- $F = (G \to H)$
- $F = \exists x G(x)$ (condition existence)
- $F = \forall x G(x)$ (condition existence)

Vérification

Par récurrence sur la structure de la formule

- $F = \bot$ (consistance)
- $F = (t = t')$ (quotient)
- $F = \neg G$ (complétude + consistance)
- $F = (G \vee H)$ (complétude)
- $F = (G \wedge H)$
- $F = (G \to H)$
- $F = \exists x G(x)$ (condition existence)
- $F = \forall x G(x)$ (condition existence)

Vérification

Par récurrence sur la structure de la formule

- $F = \perp$ (consistance)
- $F = (t = t')$ (quotient)
- $F = \neg G$ (complétude + consistance)
- $F = (G \vee H)$ (complétude)
- $F = (G \wedge H)$
- $F = (G \rightarrow H)$
- $F = \exists x G(x)$ (condition existence)
- $F = \forall x G(x)$ (condition existence)

Le théorème de complétude est démontré $\square$

Sommaire

Modèle non standard de l'arithmétique

Définition

$\mathcal{C} = \{0, c\}$

$PA_{ns} = PA \cup \{\neg(c = 0), \neg(c = S0), \neg(c = SS0), \neg(c = SSS0), \ldots\}$

Modèle non standard de l'arithmétique

Définition

$\mathcal{C} = \{0, c\}$

$PA_{ns} = PA \cup \{\neg(c = 0), \neg(c = S0), \neg(c = SS0), \neg(c = SSS0), \ldots\}$

Proposition

$PA_{ns} \nvdash \perp$.

Modèle non standard de l'arithmétique

Définition

$\mathcal{C} = \{0, c\}$

$PA_{ns} = PA \cup \{\neg(c = 0), \neg(c = S0), \neg(c = SS0), \neg(c = SSS0), \ldots\}$

Proposition

$PA_{ns} \nvdash \perp$.

Proposition

Par le théorème de complétude, il existe donc un modèle de PA_{ns}.

$c_{\mathcal{M}}$ est différent de tous les entiers standards, donc on a un modèle non standard de l'arithmétique.

Sommaire

Généralisation

f_i : symboles de fonction d'arité quelconque fixée

Définition

L'ensemble des termes est défini par :

$$\mathcal{T} = \mathcal{V} \mid f_i(\mathcal{T}, ..., \mathcal{T})$$

Généralisation

f_i : symboles de fonction d'arité quelconque fixée

Définition

L'ensemble des termes est défini par :

$$\mathcal{T} = \mathcal{V} \mid f_i(\mathcal{T}, \ldots, \mathcal{T})$$

R_i : symboles de relation d'arité quelconque fixée (dont $=$ d'arité 2 et $\perp$ d'arité 0)

Définition

L'ensemble des formules est défini par :

$$\mathcal{F} = R_i(\mathcal{T}, \ldots, \mathcal{T}) \mid \neg\mathcal{F} \mid (\mathcal{F} \vee \mathcal{F}) \mid (\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \mid (\mathcal{F} \to \mathcal{F}) \mid \exists\mathcal{V}\mathcal{F} \mid \forall\mathcal{V}\mathcal{F}$$

Bibliographie suggérée

René David, Karim Nour, Christophe Raffalli
Introduction à la logique
Théorie de la démonstration

Jean-Louis Krivine
Théorie des ensembles