Structure topologique de l'espace des réseaux unitaires

Table des matières

Introduction

L'espace des réseaux unitaires de $\mathbb{R}^2$ noue des liens avec de nombreux domaines des mathématiques. Entre autres, dans les avancées les plus récentes, Étienne Ghys a montré en 2006 que les nœuds modulaires (orbites périodiques de l'action du sous-groupe diagonal de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur l'espace des réseaux unitaires) sont en correspondance bijective avec les nœuds de Lorenz (solutions périodiques du système différentiel de Lorenz dans $\mathbb{R}^3$) (cf [Ghys]).

On se propose, dans ce TIPE, d'étudier la structure topologique de l'espace des réseaux unitaires. Après avoir défini une topologie sur cet espace, nous montrerons qu'il est homéomorphe à la sphère unité en dimension 4 privée d'un nœud de trèfle. La démonstration présentée ici est essentiellement celle donnée dans [DCP] (théorème 3.1).

1 Des réseaux aux matrices

Définition 1. *Un* réseau *est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$ l'engendrant comme espace vectoriel (cf image 1 page 7). On note $\mathcal{R}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des réseaux.*

Proposition 2. *$\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ est un réseau si et seulement s'il existe $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $\Lambda = g(\mathbb{Z}^2)$.*

Démonstration : Pour le sens direct, on choisit $u \in \Lambda - \{0\}$ de norme minimale, puis $v \in \Lambda - \mathbb{R}u$ dont la distance à $\mathbb{R}u$ est minimale (qui existent par discrétude de Λ et car $\mathrm{Vect}(\Lambda) = \mathbb{R}^2$). On a alors $\mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v \subset \Lambda$, et réciproquement si $x \in \Lambda$, par des translations autorisées (car Λ est un groupe) on peut le ramener dans $[0,1[u \oplus [0,1[v$, donc par minimalité de v et de u on avait bien $x \in \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$. Il suffit enfin de poser g la matrice de passage de (u,v) à la base canonique.

L'autre sens est facile.

Proposition 3. *Soit $g, g' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, alors $g(\mathbb{Z}^2) = g'(\mathbb{Z}^2)$ si et seulement si $g^{-1}g' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. En particulier, si $g(\mathbb{Z}^2) = g'(\mathbb{Z}^2)$, $|\det(g)| = |\det(g')|$.*

Démonstration : $g(\mathbb{Z}^2) = g'(\mathbb{Z}^2)$ ssi $g^{-1}g'(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$. On a donc $g^{-1}g' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ d'où le résultat car $g^{-1}g'$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, et donc de déterminant ± 1.

Définition 4. *Soit Λ un réseau, $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $\Lambda = g(\mathbb{Z}^2)$. On note $\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^2/\Lambda) = |\det(g)|$ et on définit $\mathcal{R}_1(\mathbb{R}^2) = \{\Lambda \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^2) \mid \mathrm{Vol}(\mathbb{R}^2/\Lambda) = 1\}$ l'ensemble des* réseaux unitaires.

Démonstration : Cette définition a un sens d'après les deux propositions précédentes.

Définition 5. $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathcal{R}_1(\mathbb{R}^2) \\ g\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \longmapsto & g(\mathbb{Z}^2) \end{array}\right.$ *est une bijection. On munit $\mathcal{R}_1(\mathbb{R}^2)$ de l'unique topologie qui fasse de cette application un homéomorphisme, et on a ainsi* $\boxed{\mathcal{R}_1(\mathbb{R}^2) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$.

Démonstration : Découle des propositions précédentes.

2 Des matrices au demi-plan

Proposition 6. $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \\ g\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \longmapsto & \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})(\pm g^{-1}) \end{array}\right.$ *est un homéomorphisme, d'où* $\boxed{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$ *($\mathrm{PSL}_2(A) = \mathrm{SL}_2(A)/\{\pm I_2\}$).*

Démonstration : L'application $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \\ g & \longmapsto & \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})(\pm g^{-1}) \end{array}\right.$ est continue, surjective, et deux éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ont la même image si et seulement s'ils sont dans la même classe à gauche suivant $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, donc passe au quotient en une bijection continue. On vérifie de même que sa bijection réciproque est également continue.

Définition 7. *On pose $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le* demi-plan de Poincaré *et $T_1\mathbb{H} = \mathbb{H} \times \mathbb{S}^1$ son fibré tangent unitaire. On notera $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Les applications suivantes définissent des actions de groupe à gauche de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur respectivement $\mathbb{H}$ et $T_1\mathbb{H}$:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times T_1\mathbb{H} & \longrightarrow & T_1\mathbb{H} \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (z, v)\right) & \longmapsto & \left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{|cz+d|^2}{(cz+d)^2} v\right) \end{array}\right.$$

Démonstration : Calcul.

Proposition 8. $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & T_1\mathbb{H} \\ g & \longmapsto & g \cdot (i, 1) \end{array}\right.$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration :

– Injectivité : calcul

– Surjectivité : $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \cdot (i,1) = (x+iy, e^{i\theta})$
– Continuité : clair par compositions de fonctions continues
– Continuité de la réciproque : si pour $x \in T_1\mathbb{H}$ on pose $\theta_x : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & T_1\mathbb{H} \\ g & \longmapsto & g \cdot x \end{array} \right.$, il suffit de montrer que tous les θ_x sont continus en 0, ce qui découle de la locale compacité de $T_1\mathbb{H}$ et de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, et du théorème de Baire.

Proposition 9. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \Gamma\backslash T_1\mathbb{H} \\ \Gamma g & \longmapsto & (\Gamma g)\cdot(i,1) \end{array} \right.$ *est un homéomorphisme, donc* $\boxed{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \cong \Gamma\backslash T_1\mathbb{H}}$.

Démonstration : L'application précédente passe au quotient.

3 Du demi-plan aux deux tores

Définition 10. *On définit* $D = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1 \text{ et } |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$ *le* domaine fondamental *de* Γ *sur* $\mathbb{H}$ *et* $T_1D = D \times \mathbb{S}^1$ *(cf image 2).*

Proposition 11. *Soit* $z \in \mathbb{H}$*. Alors d'une part,* $\Gamma z \cap D \neq \emptyset$*, et d'autre part, si* $\mathrm{Card}(\Gamma z \cap D) > 1$*, alors* $\Gamma z \cap D = \{z_0, -\overline{z_0}\}$ *avec un* $z_0 \in \partial D$

Démonstration :
– Existence : on choisit un élément de Γz de partie imaginaire maximale (possible car $\mathrm{Im}(gz) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ qui admet un plus grand élément) qu'on peut supposer de partie réelle inférieure à $\frac{1}{2}$ en valeur absolue en faisant agir la puissance adéquate de $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, et l'action de $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ montre alors que son module est supérieur à 1, sinon il ne serait pas de partie imaginaire maximale.
– Unicité (ou pas) : étude de cas

Remarque 12. *Il est difficile de se représenter* $\Gamma\backslash T_1\mathbb{H}$ *sans comprendre comment* Γ *agit sur* $T_1\mathbb{H}$*. La proposition suivante, conjointement avec la précédente, montre que* $\Gamma\backslash T_1\mathbb{H}$ *est homéomorphe au fibré tangent unitaire de* D*, recollé suivant le bord de* D*, symétriquement par rapport à l'axe des ordonnées (cf image 3).*

Proposition 13. $\boxed{\Gamma\backslash T_1\mathbb{H} \cong \Gamma\backslash T_1D}$ *(*$\Gamma\backslash T_1D$ *représente l'espace quotient pour la relation d'équivalence induite par l'action de* Γ *sur* $T_1\mathbb{H}$*)*

Démonstration : L'application canonique de $\Gamma\backslash T_1\mathbb{H}$ dans $\Gamma\backslash T_1D$ est bien définie d'après la proposition précédente, bijective, et fermée (un fermé de $\Gamma\backslash T_1\mathbb{H}$ se relève en un fermé saturé de $T_1\mathbb{H}$ donc en un fermé saturé de T_1D, qui s'envoie sur un fermé de $\Gamma\backslash T_1D$).

Pour la continuité il faut montrer que si F est un fermé de T_1D, $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma F$ est également fermé ce qui découle du fait qu'un compact K de $T_1\mathbb{H}$ n'intersecte qu'un nombre fini de γT_1D. En effet, l'intersection $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma F\right) \cap K = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}((\gamma F)\cap K)$ se réduit alors à une union finie de fermés donc est fermée, et une partie de $T_1\mathbb{H}$ est fermée si et seulement si son intersection avec tout compact est fermée. La démonstration du fait qu'un compact K de $T_1\mathbb{H}$ n'intersecte qu'un nombre fini de γT_1D n'est pas très compliquée mais légèrement calculatoire.

Définition 14. *Pour étudier $\Gamma\backslash T_1 D$ on a besoin d'étudier séparément ce qu'il se passe au niveau des deux points « critiques », à savoir $\{i\}$ et $\omega = \{e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}\}$. On définit ainsi*

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{(z,v) \in \Gamma\backslash T_1 D, |\mathrm{Re}(z)| = \frac{1}{4}\} \\ \tau_i & = & \{(z,v) \in \Gamma\backslash T_1 D, |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{4}\} \\ \tau_\omega & = & \{(z,v) \in \Gamma\backslash T_1 D, |\mathrm{Re}(z)| \geq \frac{1}{4}\} \end{array}$$

τ_i et τ_ω sont fermés, connexes, de réunion $\Gamma\backslash T_1 D$ et d'intersection A (cf image 4).

Proposition 15. $\boxed{\Gamma\backslash T_1 D \cong \tau_i \sqcup_{id_A} \tau_\omega}$ *(recollement de τ_i et τ_ω selon A)*

Démonstration : L'application canonique de $\tau_i \sqcup \tau_\omega$ dans $\Gamma\backslash T_1 D$ est surjective, continue, fermée, et deux éléments ont la même image si et seulement s'ils sont dans A, donc elle passe au quotient en un homéomorphisme.

Définition 16. *Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ le disque unité fermé et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.*

On définit $T_i = (\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ où $\pm \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$ par $(z,v) \mapsto (\pm z, \pm v)$, et $C_i = (\{\pm 1\} \times \mathbb{S}^1)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \subset T_i$

De même, $T_\omega = (\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1)/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, où $n \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$ par $(z,v) \mapsto (\omega^n z, \omega^n v)$ et $C_\omega = (\{1, \omega, \omega^2\} \times \mathbb{S}^1)/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \subset T_\omega$

Remarque 17. *T_i et T_ω sont deux tores pleins « vrillés », C_i est une courbe fermée sur la surface de T_i faisant deux tours autour de l'axe de T_i, tandis que C_ω fait trois tours autour de l'axe de T_ω. Le nombre de tours qu'elles font autour de l'âme (cercle intérieur) de $T_{i,\omega}$ est quelconque, car $T_{i,\omega}$ ne sont pas a priori plongés dans $\mathbb{R}^3$ et si l'on veut les plonger dans $\mathbb{R}^3$, le recollement peut être effectué de diverses manières non isotopes (cf image 5).*

Proposition 18. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \partial T_i & \longrightarrow & \partial T_\omega \\ (z,v) & \longmapsto & (z',v') = (z^{-\frac{2}{3}}, z^{\frac{1}{3}} v) \end{array} \right.$ *est un homéomorphisme qui envoie C_i sur C_ω.*

Démonstration : Tout d'abord la définition a bien un sens car si $z'^3 = z^{-2}$ et $v'^3 = zv^3$ avec z et v déterminés à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ près, z' et v' sont bien déterminés à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ près. L'application ψ : $\left\{ \begin{array}{ccc} \partial T_\omega & \longrightarrow & \partial T_i \\ (z,v) & \longmapsto & (z^{-\frac{3}{2}}, z^{\frac{1}{2}} v) \end{array} \right.$ est bien définie pour des raisons analogues, et on vérifie facilement que c'est la réciproque de φ donc cette dernière est bijective. φ et ψ sont continues toutes les deux donc φ est un homéomorphisme, et C_i est bien envoyé sur C_ω car $(e^{\frac{2in\pi}{3}})^3 = (\pm 1)^{-2}$.

Proposition 19. *Il existe $f_{i,\omega} : \tau_{i,\omega} \to T_{i,\omega} - C_{i,\omega}$ des homéomorphismes tels que $f_\omega|_A = \varphi \circ f_i|_A$*

Démonstration : On construit tout d'abord f_i et f_ω sans tenir compte de la dernière condition, en remarquant qu'on aura nécessairement $f_{i,\omega}(A) = \partial T_{i,\omega} - C_{i,\omega}$. En voyant $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$ comme le fibré tangent unitaire du disque fermé, il est facile de voir géométriquement qu'on peut expliciter de tels homéomorphismes (l'absence de $C_{i,\omega}$ étant due à l'absence du point à l'infini dans D).

On peut ensuite déformer f_i et f_ω de façon à les rendre compatibles relativement à φ.

Proposition 20. $\boxed{\tau_i \sqcup_{id_A} \tau_\omega \cong (T_i - C_i) \sqcup_{\varphi|_{\partial T_i - C_i}} (T_\omega - C_\omega)}$

Démonstration : L'application de $\tau_i \sqcup \tau_\omega$ dans $(T_i - C_i) \sqcup_{\varphi|_{\partial T_i - C_i}} (T_\omega - C_\omega)$ induite par f_i et f_ω est continue, fermée et surjective. De plus, deux éléments ont la même image si et seulement s'ils sont dans A, donc elle passe au quotient en un homéomorphisme.

4 Des deux tores au nœud de trèfle

Définition 21. *La sphère unité en dimension* 4 *est définie par* $\mathbb{S}^3 = \{(z, z') \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |z'|^2 = 1\}$.

En comparant les modules de z *et* z' *on peut découper la sphère en les deux tores* $\mathbb{T}_\pm = \{(z, z') \in \mathbb{S}^3 \mid |z| \gtreqless |z'|\}$ *d'intersection* $\mathbb{T} = \{(z, z') \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = |z'| = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

On considère enfin le nœud de trèfle $K_\clubsuit = \mathrm{Im}\left(\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^3 \\ e^{i\theta} & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{3i\theta}, e^{2i\theta}) \end{array}\right.\right) \subset \mathbb{T}$ *(cf image 6)*

Remarque 22. *Par projection stéréographique,* $\mathbb{S}^3$ *est homéomorphe à* $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$*. Ainsi* $\mathbb{T}$ *est un tore, car il est homéomorphe au produit cartésien des deux cercles* $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *et* $|z'| = \frac{1}{\sqrt{2}}$*, et* $\mathbb{T}_-$ *et* $\mathbb{T}_+$ *étant les adhérences des composantes connexes de* $\mathbb{S}^3 - \mathbb{T}$*, ce sont des tores pleins.*

Proposition 23. $\boxed{(\mathbb{T}_- - K_\clubsuit) \sqcup_{id_{\mathbb{T}-K_\clubsuit}} (\mathbb{T}_+ - K_\clubsuit) \cong \mathbb{S}^3 - K_\clubsuit}$

Démonstration : Pareil qu'à la proposition 15.

Remarque 24. *On vient de voir que* $\mathbb{S}^3$ *peut se décomposer en le recollement de deux tores sur leur bord. La proposition suivante montre qu'il est alors possible de plonger les deux tores « abstraits »* T_i *et* T_ω *dans* $\mathbb{S}^3$ *en identifiant* T_i *à* $\mathbb{T}_-$ *et* T_ω *à* $\mathbb{T}_+$*, ceci de telle sorte que les deux courbes* C_i *et* C_ω *se confondent. Étant donné que l'âme de* $\mathbb{T}_-$ *est l'axe de* $\mathbb{T}_+$ *et réciproquement, d'après la remarque 17 la courbe commune fait deux tours autour de l'axe de* T_i *et trois tours autour de son âme, ce qui montre qu'il ne peut s'agir que du nœud de trèfle.*

Proposition 25. $\boxed{(T_i - C_i) \sqcup_{\varphi|_{\partial T_i - C_i}} (T_\omega - C_\omega) \cong (\mathbb{T}_- - K_\clubsuit) \sqcup_{id_{\mathbb{T}-K_\clubsuit}} (\mathbb{T}_+ - K_\clubsuit)}$

Démonstration : L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{D} \times \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{T}_- \\ (z, v) & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2}}(zv^3, \sqrt{2 - |z|^2}v^2) \end{array}\right.$ est continue, surjective et telle que deux points ont la même image ssi ils sont égaux modulo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc elle passe au quotient en un homéomorphisme de T_i dans $\mathbb{T}_-$ qui envoie C_i sur $K_\clubsuit$. ($\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$ est compact)

De même on vérifie que $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{D} \times \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{T}_+ \\ (z, v) & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2 - |z|^2}v^3, zv^2) \end{array}\right.$ passe au quotient en un homéomorphisme de T_ω dans $\mathbb{T}_+$ qui envoie C_ω sur $K_\clubsuit$.

D'après la définition de φ, on vérifie que le passage au quotient se fait bien, d'où le résultat.

Théorème 26. *On a donc finalement* $\boxed{\boxed{\mathcal{R}_1(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{S}^3 - K_\clubsuit}}$.

□

Références

[Ghys] É. Ghys – « Knots and dynamics », dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Madrid, 2006)*, Vol. 1, Amer. Math. Soc., 2006, p. 247–277 `http://www.icm2006.org/proceedings/Vol_I/15.pdf`

[Dal'Bo] F. Dal'Bo – « Trajectoires géodésiques et horocycliques », EDP Sciences/CNRS Éditions, 2007

[DCP] F. Dal'Bo & G. Courtois & F. Paulin – « Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques », Éditions de l'École Polytechnique, 2008

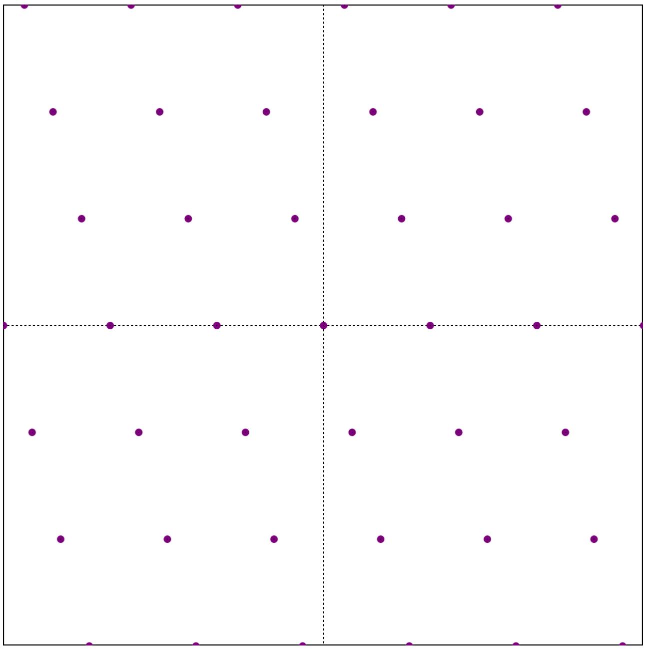

FIG. 1 – Le réseau unitaire engendré par $(1, 0)$ et $(\sqrt{3}, 1)$

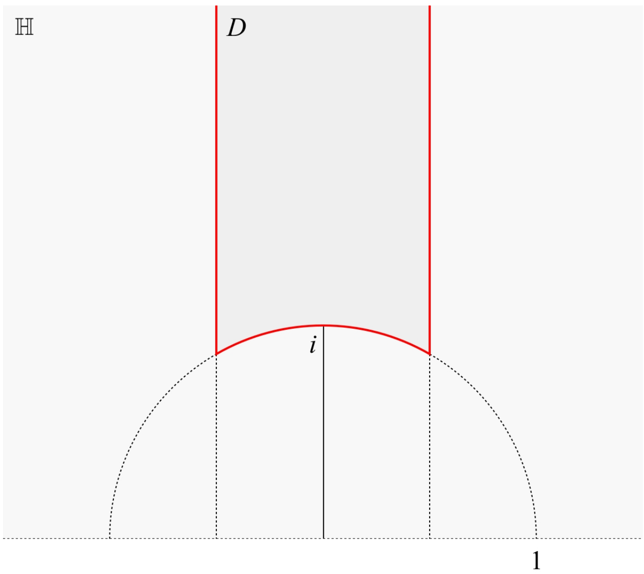

FIG. 2 – Domaine fondamental D de l'action de Γ sur $\mathbb{H}$

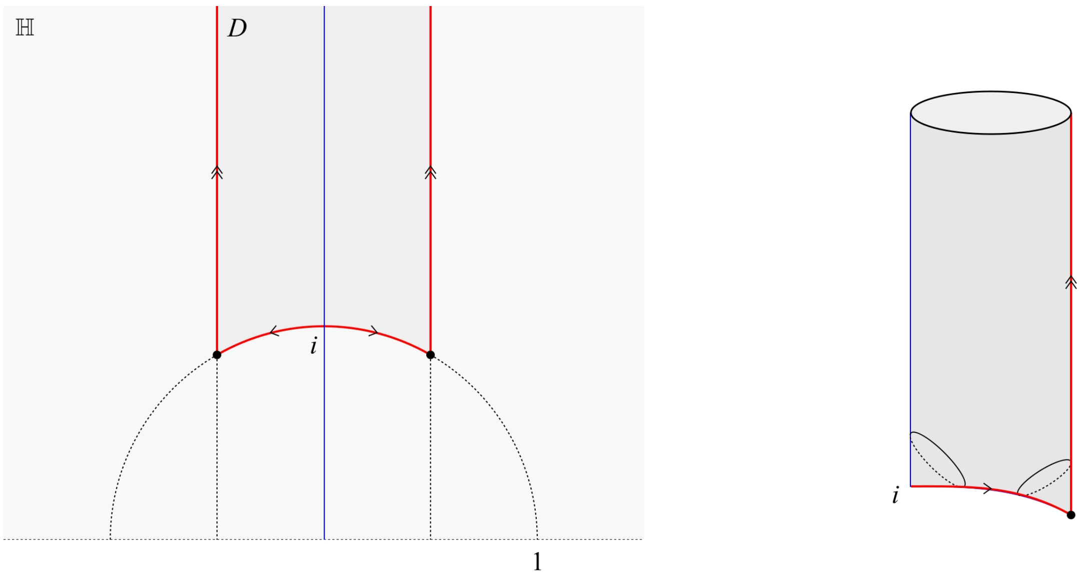

FIG. 3 – À droite est représenté $\Gamma\backslash D$, le recollement de D suivant son bord (en rouge) symétriquement par rapport à l'axe des ordonnées (en bleu). Le point noir correspond au point $\{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}\}$. Pour imaginer $\Gamma\backslash T_1 D$, il suffit de reprendre ce recollement mais avec $T_1\mathbb{H}$ et $T_1 D$ à la place de $\mathbb{H}$ et D

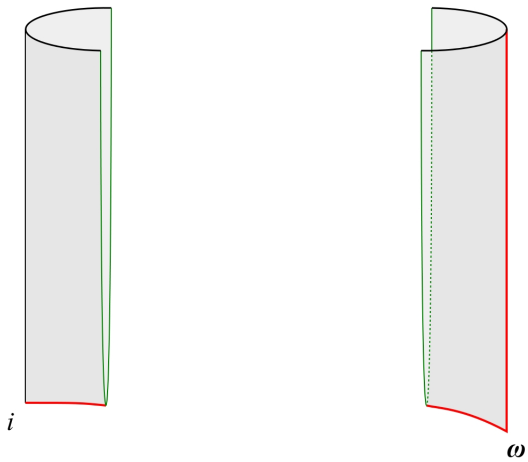

FIG. 4 – La courbe verte représente A, la partie de gauche est τ_i et celle de droite τ_ω (le tout projeté sur $\Gamma\backslash D$, il ne faut pas oublier qu'ils vivent en fait dans $\Gamma\backslash T_1 D$)

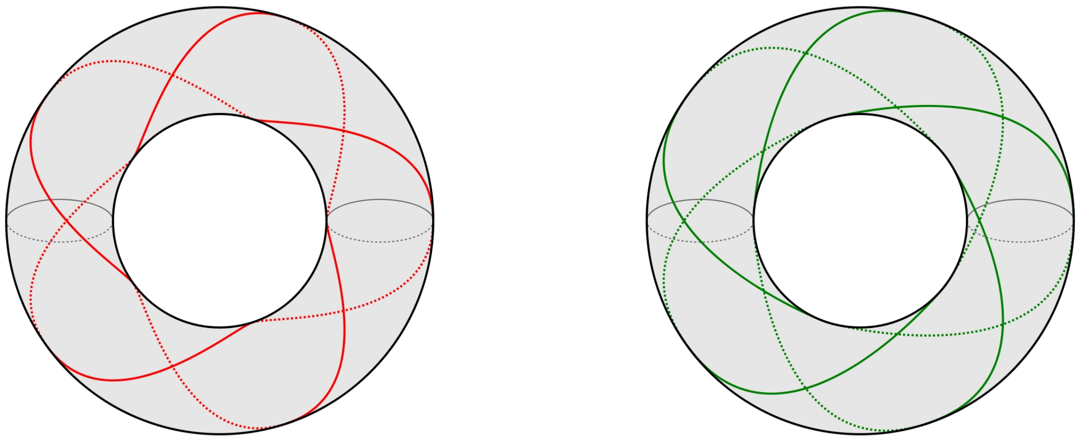

Fig. 5 – Deux plongements possibles de T_i et T_ω dans $\mathbb{R}^3$: la courbe rouge (C_i) fait deux fois le tour de l'axe et cinq fois le tour de l'âme, la courbe verte (C_ω) trois et cinq

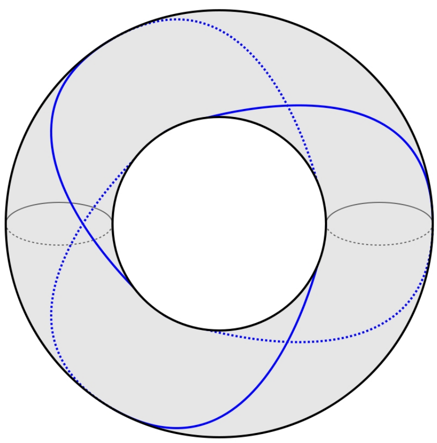

Fig. 6 – Le nœud de trèfle plongé dans $\mathbb{R}^3$